

PARADOKS SI KEMBAR DALAM TEORI RELATIVITAS KHUSUS SEBAGAI MATERI PENGAYAAN FISIKA DI SMA

Hery Kustanto

SMA N 1 Kota Magelang, Jawa Tengah

E-mail: hery_kustanto1969@yahoo.com

Raden Oktova

Program Studi Pendidikan Fisika, Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta

Kampus II, Jl. Pramuka 42 Lt. 3, Yogyakarta 55161

INTISARI

Tulisan ini mengkaji ulang berbagai upaya penjelasan tentang paradoks si kembar dalam teori relativitas khusus. Didapatkan banyak penjelasan tentang paradoks kembar, di antaranya adalah penjelasan menggunakan efek Doppler, ruang-waktu Minkowski, metode dinamika Lagrange, diagram Brehme, kontraksi panjang, dan tinjauan kerangka inersial. Dari berbagai penjelasan itu, kemudian dipilih tiga penjelasan tentang paradoks si kembar yang mungkin untuk diberikan di Sekolah Menengah Atas (SMA) sebagai materi pengayaan pada topik teori relativitas khusus, yaitu dengan pendekatan kontraksi panjang, kerangka inersial, dan efek Doppler.

Kata kunci: paradoks si kembar, teori relativitas khusus, fisika SMA

THE TWIN PARADOX IN THE THEORY ON SPECIAL RELATIVITY AS AN ENRICHMENT TOPIC FOR HIGH SCHOOL PHYSICS

ABSTRACT

This paper reviews various efforts to explain the twin paradox in the theory on special relativity. Many explanations can be found, including those using the Doppler effect argument, the Minkowski space-time, the Lagrange dynamic method, the Brehme diagram, length contraction, and inertial frame argument. Three of them are chosen as enrichment material for high school physics on the theory on special relativity; these are approaches using length contraction, inertial frame and Doppler effect.

Keywords: twin paradox, theory on special relativity, high school physics.

I. PENDAHULUAN

Paradoks si kembar (D'Auria dan Trigiante, 2011) merupakan satu kasus yang muncul dari efek relativistik dan sampai saat ini masih ramai dibicarakan orang, termasuk para ilmuwan, guru-guru fisika dan orang-orang awam yang sekedar tertarik dengan kasus tersebut. Para ilmuwan dari waktu ke waktu selalu mencari ide, membuat model maupun ilustrasi bagaimana dapat meyakinkan orang bahwa paradoks merupakan sesuatu yang berada pada jalur ilmiah dan logis, bukan sekedar cerita fiksi. Sedangkan guru-guru fisika berupaya untuk mengemas paradoks si kembar agar bisa dijelaskan kepada siswanya dengan mudah, dapat dipahami dan diterima oleh para siswa sebagai suatu kebenaran ilmu.

Kasus paradoks si kembar yang merupakan materi pengayaan dalam teori relativitas khusus untuk siswa kelas tiga pada pelajaran fisika di sekolah menengah atas selalu menyisakan tanda tanya bagi para siswa setiap tahun, hal itu karena pemahaman sebagian besar guru fisika SMA tentang kasus paradoks si kembar masih belum memadai, dan juga karena sampai saat ini kasus si kembar memang masih merupakan sebuah paradoks.

Kesulitan pengajaran paradoks si kembar di sekolah menengah atas ternyata bukan hanya terjadi di Indonesia, tetapi juga terjadi di negara-negara lain di dunia. Meskipun akan memunculkan banyak kesulitan dalam mengajarkan pada siswa, paradoks si kembar dapat dijelaskan terutama kepada siswa yang pintar dan punya rasa ingin tahu yang besar. Yang penting adalah guru harus menguasai dan yakin dulu bahwa peristiwa itu mungkin untuk dijelaskan, sehingga guru dapat merencanakan suatu metode pengajaran yang ilmiah dengan penyajian khusus sesuai kebutuhan dan kemampuan siswanya (Shadmi, 1985).

Dengan tujuan yang sama, yaitu untuk memberikan pemahaman yang baik terhadap siswa tentang paradoks si kembar, dapat digunakan pendekatan peristiwa gerak dipercepat beraturan dan menitikberatkan

tinjauan lokal dari masing-masing si kembar mengenai pertukaran sinyal cahaya antar keduanya seperti perbedaan tinjauan antara keduanya tentang stellar di ruang angkasa (Müller, 2008).

Berpijak dari masih kurangnya pemahaman sebagian guru fisika tentang paradoks si kembar diatas, penulisan ini bertujuan untuk memberikan penjelasan tentang masalah tersebut sehingga pengajaran paradoks si kembar sebagai materi pengayaan yang selama ini lebih sering dihindari oleh para guru dan menjadi sesuatu yang tak terjawab secara tuntas, menjadi sesuatu yang mungkin dijelaskan dan dapat memuaskan rasa keingintahuan siswa di sekolah.

II. KAJIAN PUSTAKA

a. Dilatasi Waktu

Dilatasi waktu merupakan suatu gejala dimana selang waktu antara dua detak dari suatu alat pengukur waktu akan mengalami kelambatan apabila alat tersebut bergerak relatif terhadap pengamat. Untuk menjelaskan hal itu, Gambar 1 menunjukkan suatu alat pengukur waktu yang di buat dengan mengirimkan sinyal cahaya menuju cermin pada jarak L dan kemudian kembali ke alat penerima. Setiap detak sama dengan perjalanan pergi pulang dari pengirim sinyal dan cermin. Pengukur waktu tersebut dalam keadaan diam terhadap kerangka laboratorium (Gambar 1.a). Gambar 1.b memperlihatkan pengukur waktu yang diamati dari laboratorium ketika alat tersebut diam didalam roket yang sedang bergerak ke kanan dengan kecepatan v . Sebenarnya alat tersebut berdetak setiap perjalanan sinyal pergi pulang, sehingga seharusnya $c \cdot t = 2L$, dimana c = kelajuan cahaya di ruang hampa, tetapi karena kedua kaki dari keseluruhan perjalanan adalah sama, maka dalam memudahkan analisis, kita menggunakan setengah perjalanan saja. Apabila t adalah waktu yang diperlukan sinyal untuk mencapai cermin di laboratorium untuk pengukur waktu yang diam di dalam roket (Gambar 1.b), t' adalah waktu yang diperlukan sinyal untuk mencapai cermin di dalam roket pada kerangka diamnya (Gambar 1.a), dan L adalah jarak antara sumber sinyal ke cermin, maka diperoleh persamaan

$$L = c \cdot t. \tag{1}$$

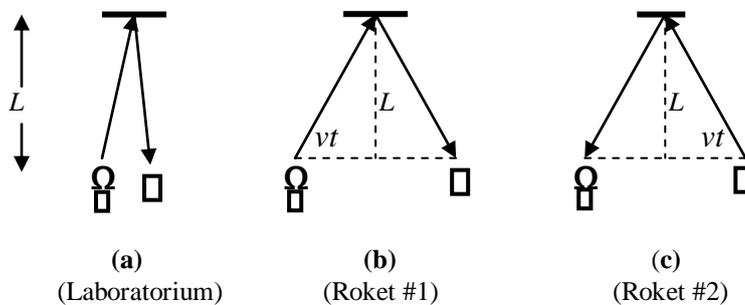
Dari separuh segitiga pada Gambar 1.b, dan dengan menggunakan teorema pythagoras didapatkan persamaan,

$$L^2 + v^2 \cdot t^2 = c^2 \cdot t^2. \tag{2}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke dalam persamaan (2) diperoleh

$$t' = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3}$$

Karena $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, arloji yang diam di dalam roket kelihatan lebih lambat menurut pengamat yang diam di laboratorium. Dalam perjalanan balik seperti pada Gambar 1.c, di mana roket bergerak dengan kecepatan v kekiri, pencatat waktunya juga akan melambat dibandingkan dengan yang ada di laboratorium. Akan tetapi itu juga akan terjadi pada pencatat waktu yang ada di laboratorium saat diamati oleh orang yang berada di dalam roket.



Gambar 1. (a) Perjalanan sinyal dari alat pencatat waktu menurut kerangka diam di laboratorium, (b) perjalanan sinyal alat pencatat waktu di dalam roket yang bergerak dengan kecepatan v ke kanan yang diamati dari laboratorium, (c) perjalanan sinyal alat pencatat waktu di dalam roket yang bergerak dengan kecepatan v ke kiri yang diamati dari laboratorium.

b. Kontraksi Panjang

Kontraksi panjang merupakan gejala berkurangnya panjang suatu benda saat benda tersebut bergerak relatif terhadap pengamat. Gambar 2 menunjukkan suatu sinyal cahaya memantul dari sebuah cermin menuju penerima sinyal. Sinyal cahaya tersebut berlaku sebagai alat pengukur panjang yang dipergunakan untuk mengukur panjang dari suatu batang di dalam laboratorium dan di dalam roket. Apabila L' adalah panjang batang di dalam roket, L adalah panjang batang di laboratorium, t_1 adalah waktu tempuh dari sinyal cahaya menuju ke ujung batang di laboratorium, t_2 adalah waktu tempuh dari sinyal cahaya kembali dari ujung batang di laboratorium, $t = t_1 + t_2$ adalah waktu tempuh total di laboratorium, dan t' adalah waktu tempuh total di dalam roket yang bergerak dengan kecepatan v , maka di dalam laboratorium

$$L + vt_1 = ct_1, \quad (4)$$

$$L - vt_2 = ct_2, \quad (5)$$

$$t = t_1 + t_2 = \left(\frac{2L}{c}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (6)$$

sedangkan di dalam roket, $2L' = ct'$, atau

$$t' = \frac{2L'}{c}. \quad (7)$$

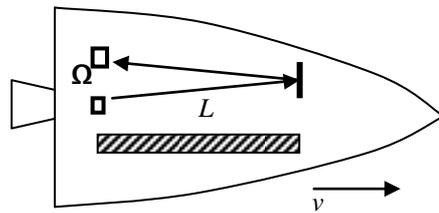
Dari persamaan pemuluran waktu,

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8)$$

Dengan memasukkan persamaan (7) ke dalam persamaan (8), diperoleh

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (9)$$

dan terlihat bahwa batang kelihatan lebih pendek di dalam kerangka laboratorium, karena $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$.



Gambar 2. Sinyal cahaya yang dipancarkan dari sumber sinyal memantul dari sebuah cermin menuju penerima sinyal dalam sebuah roket yang bergerak dengan kecepatan v .

c. Muon

Salah satu peristiwa alam yang membuktikan kontraksi panjang dan dilatasi waktu adalah teramatinya peluruhan muon di atmosfer. Muon merupakan sebuah partikel dasar yang bermuatan listrik negatif dan mempunyai spin $\frac{1}{2}$. Muon bersama dengan elektron, tauon dan neutrino diklasifikasikan dalam keluarga lepton dari fermion. Muon memiliki massa 207 kali massa elektron dan dilambangkan μ^- . Di atmosfer, muon tercipta ketika pion meluruh. Umur muon hanya sekitar $2,2 \times 10^{-6}$ s, namun ia bergerak dengan kecepatan yang sangat

tinggi. Karena gerakanya tersebut (sekitar $0,988c = 2,994 \times 10^8$ m/s), maka umur muon tersebut akan memanjang terhadap kerangka acuan bumi, menjadi

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 34,76 \times 10^{-6} \text{ s,}$$

sehingga dengan waktu hidup sebesar itu, muon dapat menempuh jarak $(2,994 \times 10^8) \times (34 \times 10^{-6}) = 10.410$ m (Beiser, 1991:12). Dengan jarak tempuh tersebut, ia dapat mencapai tanah dan dapat teramati oleh orang yang berada di bumi.

d. Kajian Terdahulu

Paradoks si kembar merupakan suatu efek relativistik, dimana selang waktu dari dua kejadian (misalnya selang waktu antara dua detak arloji) akan mengalami perlambatan apabila benda itu bergerak relatif terhadap seorang pengamat. Peristiwa itu sering dianalogikan dengan dua anak kembar, dimana salah satu dari anak kembar tersebut melakukan perjalanan ke antariksa dengan roket berkecepatan tinggi (mendekati kecepatan cahaya), saat kembali ke bumi ia mendapati usianya lebih muda dari kembarannya yang tinggal di bumi. Hal ini membingungkan, karena situasinya nampak simetris. Menurut pandangan si anak yang bepergian, kembarannya yang tinggal di bumi yang melakukan perjalanan terhadapnya, sehingga menurutnya, kembarannya yang di bumi yang akan lebih muda. Di sinilah paradoks dari kasus "si kembar" dalam teori relativitas khusus (Beiser, 1991:14). Sebuah paradoks dalam logika dan secara ilmiah mengacu pada hasil-hasil yang tidak sesuai, yang secara logika tidak mungkin.

Adalah Langevin (1911) orang yang pertama menjelaskan laju usia kedua anak kembar tersebut, ia mengemukakan bahwa "hanya orang yang melakukan perjalanan yang mengalami percepatan (mengalami perubahan arah kecepatan), percepatan inilah yang menjadi penyebab ketidaksamaan (bukan usia itu sendiri)". Ia menganggap efek itu sebagai suatu kejadian dari gerak mutlak. J. H. Fremlin (1980) menyatakan bahwa banyak orang belum bisa menerima hasil-hasil teoretis pada kasus paradoks si kembar, karena mereka tidak mengetahui mengapa si kembar yang bergerak tidak dapat menggunakan persamaan-persamaan relativitas untuk menghitung usia saudaranya yang tinggal di bumi. Pendapat itu sebenarnya merupakan penekanan dari beberapa pendapat yang dikemukakan sebelumnya oleh Langevin (1911), Romer (1959), dan Muller (1972). Model lain dikemukakan oleh Dray (1990). Ia mengulas tentang ketidaksimetrian yang mendasar antara kedua anak kembar, karena hanya satu dari mereka yang berubah arah sehingga mengalami percepatan. Lalu, apa yang terjadi jika alam semesta ini "tertutup", sehingga si kembar yang bepergian dengan roket dapat kembali ke bumi tanpa mengubah arah? Dengan mengandaikan kedua anak kembar dalam suatu sistem berbentuk silinder, masih didapatkan ketidaksimetrian antara kedua anak kembar tersebut.

Penjelasan mengenai paradoks si kembar dengan pendekatan efek Doppler disampaikan oleh M. Mariconi (2006). Dengan menggunakan efek Doppler ia membahas paradoks lonceng pesawat angkasa dan transformasi lorentz untuk sembarang kecepatan dalam satu dimensi.

Masih menggunakan pendekatan efek Doppler, Greenwood (1976), melakukan studi tentang paradoks si kembar dengan mengilustrasikan bahwa tiap anak kembar mengirim sinyal cahaya dengan frekuensi f_0 terhadap yang lain, dan diperoleh bahwa sinyal-sinyal yang diterima oleh masing-masing anak mengalami pergeseran frekuensi segera beraturan karena percepatan dari salah satu anak kembar yang melakukan perjalanan dengan roket.

Penjelasan yang lebih rumit tentang paradoks si kembar yaitu dengan meninjau dari pandangan bahwa semua kejadian terdapat pada kontinuum berdimensi empat yang disebut ruang – waktu (disebut ruang – waktu Minkowski). Salah satunya adalah Edward B. Manoukian (1993) dalam makalahnya yang berjudul "On The Reversal of The Triangle Inequality In Minkowski Space Time In Relativity". Dalam intisarinya dinyatakan bahwa bukti langsung dan mendasar dari pembalikan tentang pertidaksamaan segitiga dimana pernyataan bahwa garis lurus diantara dua titik bukanlah yang terpendek, tapi sebenarnya yang terpanjang, kecuali situasinya dalam ruang Euclidean. Paradoks si kembar merupakan kasus khusus dari pertidaksamaan ini.

Tinjauan lain dari paradoks si kembar dikemukakan oleh Ø. Grøn (2006), yaitu dengan metode dinamika Lagrange dalam kerangka acuan yang dipercepat beraturan, sedangkan Sears (1963) menganalisis paradoks si kembar dengan "diagram Brehme".

III. PARADOKS SI KEMBAR SEBAGAI MATERI PENGAJARAN DI SMA

Untuk keperluan sebagai materi pengajaran di sekolah, kita perlu memilih penjelasan yang sederhana mengenai paradoks si kembar sesuai dengan kemampuan dan logika anak-anak SMA. Pertama yang bisa kita lakukan yaitu memberikan ilustrasi sederhana tentang si kembar yang bepergian menggunakan pesawat dengan kecepatan luar biasa meninggalkan bumi dan kembali lagi. Sebagai contoh, sebuah pesawat ruang angkasa yang bergerak dari bumi ke suatu sistem bintang dimana jaraknya $d = 12$ tahun cahaya dan dengan kecepatan $v = 0,60c$

relatif terhadap bumi. Kita beranggapan bahwa pesawat mencapai kecepatan penuh ($0,60 c$) segera setelah lepas landas dari bumi. Waktu yang dibutuhkan oleh pesawat selama gerak pergi-pulang = t , dimana $t = \frac{2d}{v} = 40$

tahun dalam perhitungan waktu di bumi (sehingga semua orang yang ada di bumi akan bertambah umur 40 tahun ketika pesawat itu kembali). Selama dalam perjalanan, putaran waktu didalam pesawat dan usia si kembar yang

bepergian akan melambat dengan faktor $\frac{1}{\gamma}$, dengan faktor Lorentz $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, sehingga si kembar yang

bepergian akan bertambah usia sebesar $0,8 \times 40 = 32$ tahun ketika ia kembali ke bumi. Dibandingkan dengan orang yang usianya sama ketika ia meninggalkan bumi, waktu kembali, si kembar yang bepergian akan lebih muda. Mendengarkan penjelasan seperti itu, siswa biasanya akan menanyakan bagaimana kalau prosesnya dibalik. Bukankah gerak itu relatif, sehingga si kembar yang bepergian juga bisa menganggap bumilah yang bergerak terhadap dirinya? Sehingga didapati bahwa orang-orang di bumilah yang akan lebih muda?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, ada beberapa alasan yang dapat diutarakan, sebagai berikut.

a. Terjadinya Kontraksi Lorentz

Menurut pandangan si kembar yang bepergian (pesawat), sistem bintang jauh dan bumi sedang bergerak relatif terhadap pesawat dengan kecepatan v selama perjalanannya. Dalam kerangka diamnya, jarak antara

bintang jauh dan bumi adalah $= \frac{1}{\gamma} \cdot d = 0,8 \cdot 12 = 9,6$ tahun cahaya (mengalami pengerutan panjang), untuk

tiap-tiap perjalanan pergi maupun pulang. Setiap setengah perjalanan memakan waktu $\frac{9,6}{0,6} = 16$ tahun,

sehingga keseluruhan perjalanan = $2 \times 16 = 32$ tahun. Perhitungan si kembar yang bepergian memperlihatkan bahwa mereka akan kembali ke bumi dengan pertambahan usia 32 tahun. Ini sesuai dengan perhitungan si kembar yang di bumi, meskipun keduanya (si kembar yang bepergian dan si kembar yang di bumi) mengalami perjalanan yang berbeda.

b. Terjadinya perubahan kerangka inersial yang dialami si kembar yang bepergian

Si kembar yang ada di bumi selalu berada pada kerangka inersial pada seluruh waktunya, sehingga berdasarkan postulat Einstein ia boleh menggunakan perumusan pemuaian waktu untuk perjalanan si kembar yang bepergian bersama pesawat ruang angkasanya (kecuali saat pesawat ruang angkasa mengalami percepatan yaitu di awal perjalanan, waktu membalik dan diakhir perjalanan), tapi selang waktu tersebut dianggap kecil dibandingkan dengan keseluruhan perjalanan si kembar yang bepergian. Sebaliknya si kembar yang bepergian harus berubah dari satu kerangka inersial ke kerangka inersial yang lain ketika ia membalikkan pesawat, sehingga penggunaan rumus pemuaian waktu oleh si kembar yang bepergian hanya diperbolehkan sewaktu perjalanan menjauh. Berdasarkan alasan diatas, maka perhitungan si kembar yang ada di bumilah yang benar, yaitu si kembar yang bepergianlah yang lebih muda.

c. Analisis Efek Doppler

Untuk memperjelas perbedaan usia si kembar, kita juga bisa menganalisisnya dengan Efek Doppler. Pada waktu pengamat dan sumber cahaya saling menjauh, selang waktu sinyal cahaya yang diukur oleh pengamat sebesar

$$t = t_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (10)$$

sedangkan saat pengamat dan sumber cahaya saling mendekat, selang waktu sinyal cahaya yang diukur oleh pengamat dirumuskan sebagai

$$t = t_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 - \frac{v}{c})}{(1 + \frac{v}{c})}}. \quad (11)$$

Misalkan kedua anak kembar tersebut masing-masing memancarkan sinyal cahaya dalam selang waktu satu tahun, maka pada waktu mereka saling menjauhi (dalam perjalanan pergi ke bintang), selang waktu yang teramati sebesar

$$t = 1 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{0,60c}{c}}{1 - \frac{0,60c}{c}}} = \sqrt{\frac{1,60}{0,4}} = 2 \text{ tahun.}$$

Pada waktu saling mendekat (dalam perjalanan pulang ke bumi), selang waktu yang teramati sebesar

$$t = 1 \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{0,60c}{c}}{1 + \frac{0,60c}{c}}} = \sqrt{\frac{0,4}{1,6}} = 0,5 \text{ tahun.}$$

Dalam waktu 16 tahun dalam perhitungan si kembar yang bepergian dalam perjalanan meninggalkan bumi, ia menerima sinyal sebanyak $\frac{16}{2} = 8$ sinyal. Sedangkan pada waktu perjalanan pulang ke bumi, ia menerima

sinyal sebanyak $\frac{16}{0,5} = 32$ sinyal. Sehingga ia menyimpulkan bahwa usia saudara kembarnya di bumi bertambah usia sebesar $8 + 32 = 40$ th. Dalam kerangka anak yang ada di bumi, si kembar yang bepergian memerlukan waktu $\frac{12}{0,6} = 20$ tahun. Karena jarak bintang tersebut 12 tahun cahaya, maka anak yang ada

dibumi menerima sinyal dalam selang waktu 2 tahun selama $20 + 12$ tahun $= \frac{32}{2} = 16$ sinyal. Untuk sisa waktu perjalanan sebesar 40 tahun $- 32$ tahun $= 8$ tahun, ia menerima sinyal lebih sering, yaitu selama selang waktu 0,5 tahun. Jadi dalam selang waktu tersebut ia menerima sinyal sebanyak $\frac{8}{0,5} = 16$ sinyal, sehingga selama

perjalanan si kembar yang bepergian, si kembar yang ada di bumi menerima sinyal sebanyak $16 + 16 = 32$ sinyal, dan si kembar yang di bumi menyimpulkan bahwa kembarnya yang bepergian bertambah usia sebanyak 32 tahun.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berpijak dari telaah materi tentang paradoks si kembar sebagaimana diuraikan di muka, dimungkinkan untuk menjelaskan paradoks si kembar dalam teori Relativitas Khusus pada pelajaran fisika di Sekolah Menengah Atas dengan beberapa pendekatan, di antaranya terjadinya kontraksi panjang, perubahan kerangka acuan inersial, dan analisis efek Doppler.

Mengingat kenyataan bahwa sampai saat ini kasus si kembar masih merupakan sebuah paradoks, maka dalam pengajarannya kepada siswa perlu disampaikan bahwa beberapa pendekatan mengenai paradoks si kembar tersebut di atas hanyalah suatu upaya untuk menjelaskan masalah paradoks si kembar, dan bukanlah suatu penyelesaian paradoks si kembar.

DAFTAR PUSTAKA

- Beiser, A., 1991, "Konsep fisika modern". Jakarta: Penerbit Erlangga
- D'Auria, R., dan Trigiant, M., 2011, "From special relativity to Feynman diagrams: a course of theoretical particle physics for beginners (illustrated ed.)", Springer Science & Business Media, 541.
- Dray, T., 1990, "The twin paradox revisited". *Am. J. Phys.* **58** (9), 822-825.
- Fremlin, J.H., 1980. "The twin paradox from the other side". *Eur. J. Phys. I.*, **1**(1), 59 – 62.
- Greenwood, M.S., 1976. "Use of Doppler-shifted light beams to measure time during acceleration", *Am. J. Phys.* **44**, 1015.
- Grøn, Ø., 2006, "The twin paradox in the theory of relativity", *Eur. J. Phys.*, **27**, 885 – 889.
- Muller, R.A., 1972, "The twin paradox in special relativity", *Am. J. Phys.*, **40**, 966-969.
- Manoukian, E. B., 1993, "On the reversal of the triangle inequality in Minkowski space time in relativity", *Eur. J. Phys.*, **14**, 43.
- Mariconi, M., 2006, "Special relativity through the Doppler effect". *Eur. J. Phys.*, **27**, 1409 – 1423.

- Müller, T., King, A., dan Adis, D., 2008, "A trip to the end of the universe and the twin "paradox"", *Am. J. Phys.*, **76** (4 & 5), 360-373.
- Roemer, R.H., 1959, "Twin paradox in special relativity", *Am. J. Phys.*, **27**, 131 – 135.
- Sears, F. W., 1963, "Some applications of the Brehme diagram", *Am. J. Phys.*, **31**(4), 269 – 273.
- Shadmi, Y., 1985, "The twin paradox", *Phys. Educ.*, **20**(1), 33–38.